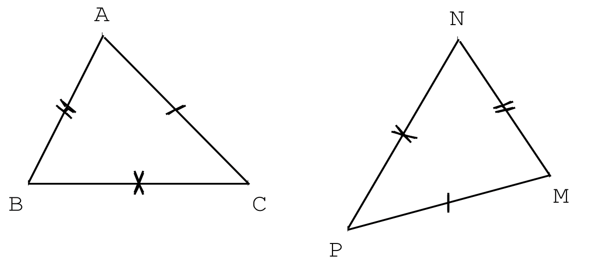
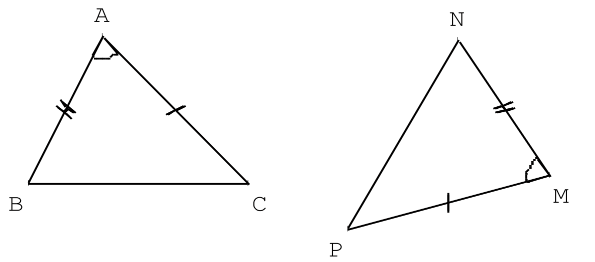
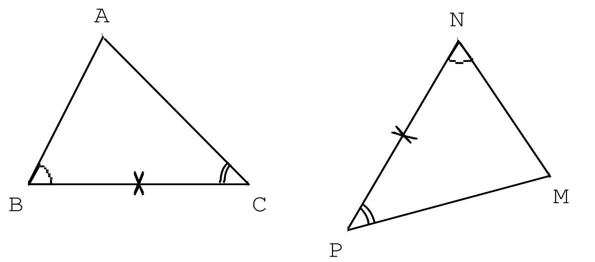
I. Triangles isométriques.

Définition. Deux triangles sont isométriques ou superposables, si l'un est l'image de l'autre par une isométrie ou la composée de plusieurs isométries (translation, rotation, réflexion).

Conséquence. Si deux triangles sont isométriques, alors ils ont leurs trois côtés égaux deux à deux.

Cas d'isométrie de deux triangles (admis).

Si deux triangles ont leur côtés égaux deux à deux, alors ils sont isométriques.	$AB = MN$ $BC = NP$ $CA = PM$	
Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés égaux deux à deux, alors ils sont isométriques.	$\widehat{A} = \widehat{M}$ $AB = MN$ $AC = MP$	
Si deux triangles ont un côté égal adjacent à deux angles égaux deux à deux, alors ils sont isométriques.	$BC = NP$ $\widehat{B} = \widehat{N}$ $\widehat{C} = \widehat{P}$	

Exercice 1.
1. Tracer un parallélogramme *ABCD* de centre *O*. Justifier que les triangles *AOB* et *DOC* sont isométriques de plusieurs façons.
2. Tracer un triangle *ABC* isocèle en *A*, et placer *H* le milieu de [*BC*].
Justifier que les triangles *ABH* et *AHC* sont isométriques de plusieurs façons.
3. Tracer un triangle équilatéral *ABC* et placer le centre de son cercle circonscrit *O*.
Justifier que les triangles *AOB*, *AOC* et *BOC* sont isométriques.

Théorème. Si deux triangles sont isométriques, alors leurs angles sont de même mesure deux à deux.

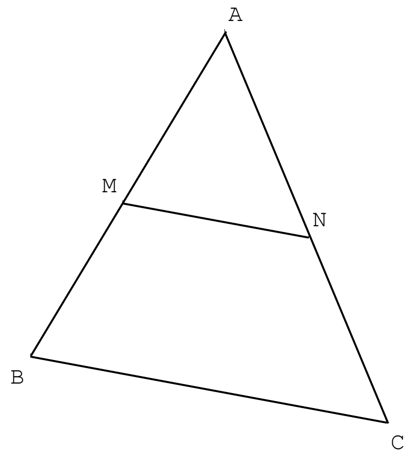
Démonstration. C'est évident puisque les isométries conservent les longueurs, mais aussi les angles.

Remarque. La réciproque est fausse. On peut construire deux triangles rectangles isocèles de dimensions différentes (mais d'angles de mêmes mesures 90°, 45°, 45°) ou deux triangles équilatéraux (trois angles de 60°) de dimensions différentes. Illustrer.

II. Triangles semblables.

a) Un exemple fondamental.

Reprenons une configuration du théorème de Thalès. Les triangles *ABC* et *AMN* ont l'angle $\widehat{A}$ en commun. De plus $\widehat{M} = \widehat{B}$ et $\widehat{N} = \widehat{C}$ comme angles correspondants. Ces deux triangles ont leurs angles égaux deux à deux. On dit que les triangles *ABC* et *AMN* sont semblables (ou qu'ils ont la même forme).



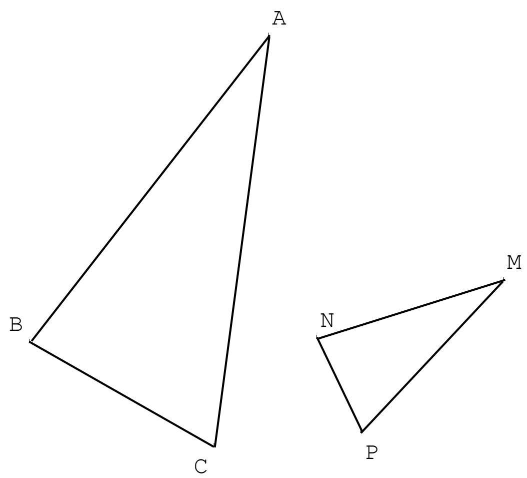
Le triangle *AMN* est une réduction du triangle *ABC*, les côtés du triangle *AMN* sont proportionnels aux côtés du triangle *ABC* : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = k$.

Autre manière de comprendre cette proportionnalité, en faisant un tableau (de proportionnalité) :

Triangle *ABC*	*AB*	*BC*	*AC*
Triangle *AMN*	*AM*	*MN*	*AN*

b) Cas général.

Définition. On dira que les triangles *AMN* et *ABC* sont semblables (ou ont la même forme) s'ils ont des angles de même mesure deux à deux.



Remarques.
♣ Des triangles isométriques sont semblables.
♣ Est-ce que des triangles semblables ont forcément des côtés proportionnels comme dans la configuration de Thalès ?
♣ Si deux triangles ont deux angles respectivement de même mesure, alors ils sont semblables.

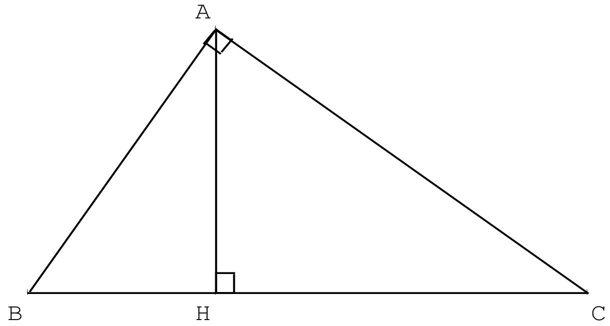
III. Triangles semblables et proportionnalité.

Théorème (admis).
Si deux triangles sont semblables, alors les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels.

Exemple. Si on sait que ABC et MNP sont semblables avec $\widehat{A} = \widehat{M}$, $\widehat{B} = \widehat{N}$, et $\widehat{C} = \widehat{P}$ alors $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{MP}{AC}$. Pour ne pas se tromper, il est préférable de faire le tableau suivant :

Angles égaux	$\widehat{A} = \widehat{M}$	$\widehat{B} = \widehat{N}$	$\widehat{C} = \widehat{P}$
Triangle ABC	BC	AC	AB
Triangle MNP	NP	MP	MN

Exercice 2. ABC est un triangle rectangle en A et H est le pied de la hauteur issue de l'angle droit.



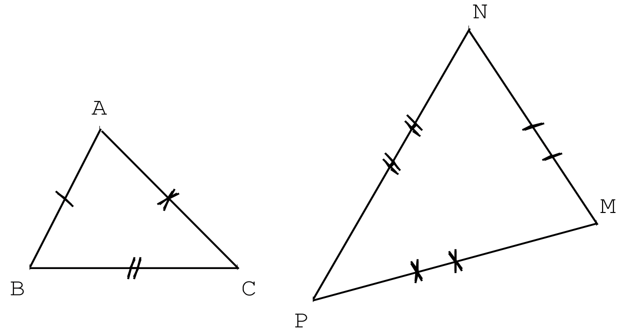
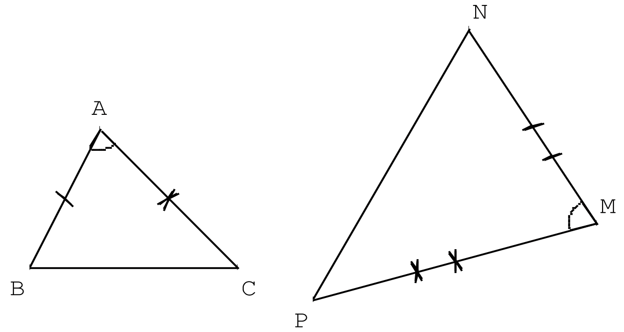
1. Démontrer que les triangles ABH et ABC sont semblables.
2. Démontrer que les triangles ACH et ABC sont semblables.
3. En déduire les relations suivantes : $BH \times BC = BA^2$ $\quad CH \times CB = CA^2$ $\quad HB \times HC = HA^2$.

Comme pour les configurations de Thalès, on a le résultat suivant.

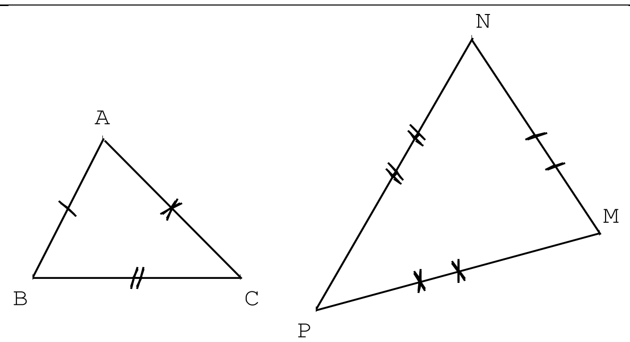
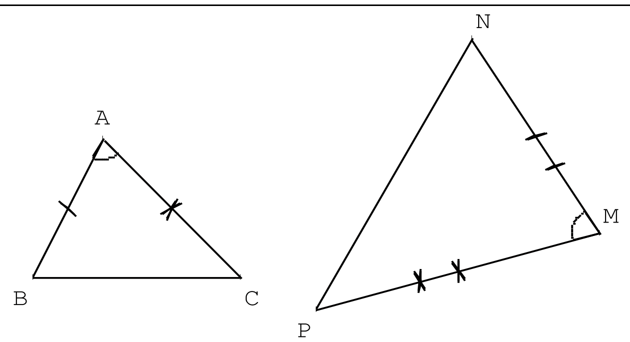
Théorème (admis). Si ABC et MNP sont deux triangles semblables et si k est le coefficient de proportionnalité (ou rapport de similitude), qui transforme ABC en MNP, alors :

Aire (MNP) = k^2 aire (ABC).

Cas de triangles semblables (admis).

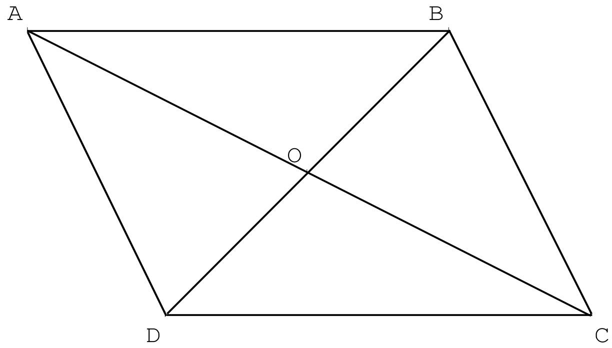
Si deux triangles ont leurs côtés respectivement proportionnels, alors ces triangles sont semblables.	$\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{MP}{AC}$	
Si deux triangles ont un angle de même mesure compris entre deux côtés respectivement proportionnels alors ils sont semblables	$\widehat{A} = \widehat{M}$ $\frac{MN}{AB} = \frac{MP}{AC}$	

Cas de triangles semblables (admis).

Si deux triangles ont leurs côtés respectivement proportionnels, alors ces triangles sont semblables.	$\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{MP}{AC}$	
Si deux triangles ont un angle de même mesure compris entre deux côtés respectivement proportionnels alors ils sont semblables	$\widehat{A} = \widehat{M}$ $\frac{MN}{AB} = \frac{MP}{AC}$	

Exercice 1.

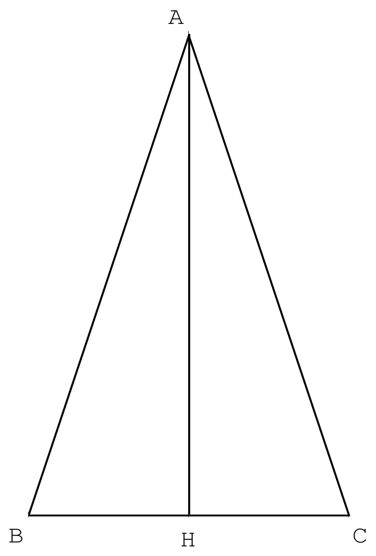
1. Traçons un parallélogramme *ABCD* de centre *O*.



Justifions que les triangles *AOB* et *DOC* sont isométriques de plusieurs façons.

- Les diagonales de *ABCD* se coupent en leur milieu *O*, donc *O* est un centre de symétrie du parallélogramme. L'image du triangle *AOB* est le triangle *DOC* par la symétrie de centre *O*. Donc ces triangles sont isométriques.
- Les diagonales de *ABCD* se coupent en leur milieu *O*, donc *OA* = *OC* et *OB* = *OD*. Les côtés opposés d'un parallélogramme sont de même longueur, donc *AB* = *CD*. Comme les trois côtés des triangles *AOB* et *DCO* sont égaux deux à deux (*OA* = *OC*, *OB* = *OD*, *AB* = *CD*) alors ces triangles sont isométriques.
- Les diagonales de *ABCD* se coupent en leur milieu *O*, donc *OA* = *OC* et *OB* = *OD*. Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont opposés par le sommet, donc égaux. Les triangles *AOB* et *DOC* ont un angle de même mesure $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ compris entre deux côtés de même longueur (*OA* = *OC* et *OB* = *OD*), donc ils sont isométriques.
- Comme (*AB*) // (*CD*) alors les angles $\widehat{ABO}$ et $\widehat{ODC}$ sont alternes internes délimités par des droites parallèles, ils sont égaux. De même, les angles $\widehat{BAO}$ et $\widehat{OCD}$ sont alternes internes délimités par des droites parallèles, donc ils sont égaux. Les côtés opposés d'un parallélogramme sont de même longueur, donc *AB* = *CD*. Les triangles *AOB* et *DOC* ont donc un côté de même longueur (*AB* = *CD*) adjacent à deux angles égaux deux à deux ($\widehat{ABO} = \widehat{ODC}$ et $\widehat{BAO} = \widehat{OCD}$), donc ils sont isométriques.

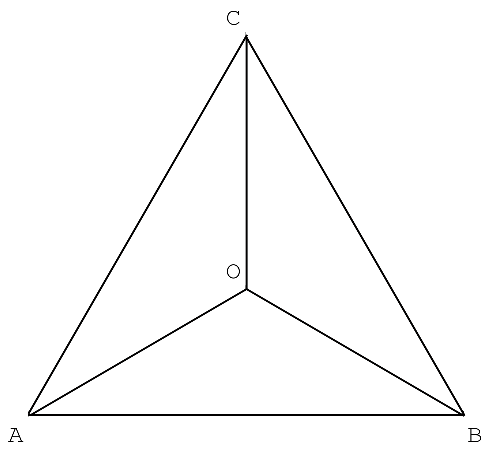
2. Traçons un triangle ABC isocèle en A, et plaçons H le milieu de $[BC]$.



Justifions que les triangles ABH et AHC sont isométriques de plusieurs façons.

- Comme le triangle ABC est isocèle en A, la droite (AH) est en même temps médiatrice, médiane, hauteur, bissectrice et axe de symétrie de ce triangle. Donc, l'image du triangle ABH par la réflexion d'axe (AH) est le triangle ACH. Donc ces triangles sont isométriques.
- Comme le triangle ABC est isocèle en A alors ces angles à la base $\widehat{ABH}$ et $\widehat{ACH}$ sont égaux et $AB = AC$. Comme H est le milieu de $[BC]$, alors $BH = CH$. Par conséquent, les triangles ABH et ACH ont un angle égal ($\widehat{ABH} = \widehat{ACH}$) compris entre deux côtés égaux deux à deux ($AB = AC$ et $BH = CH$), donc ils sont isométriques.
- Comme le triangle ABC est isocèle en A, la droite (AH) est en même temps médiane et bissectrice de ce triangle. Donc $\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$. Mais comme ABC est isocèle, on a aussi $AB = AC$ et $\widehat{ABH} = \widehat{ACH}$. Les triangles ABH et ACH ont un côté égal ($AB = AC$) adjacent à deux angles égaux deux à deux ($\widehat{BAH} = \widehat{CAH}$ et $\widehat{ABH} = \widehat{ACH}$), donc ils sont isométriques.
- Comme ABC est isocèle, alors $AB = AC$ et comme H est le milieu de $[BC]$, alors $BH = CH$. Les triangles ABH et ACH ont trois côtés égaux deux à deux ($AB = AC$, $BH = HC$ et AH côté commun), donc ils sont isométriques.

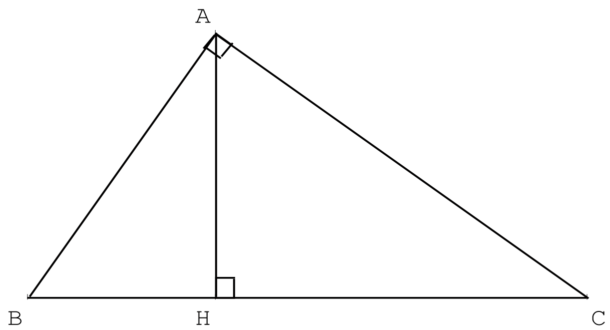
3. Traçons un triangle équilatéral *ABC* et plaçons le centre de son cercle circonscrit *O*.



Justifions que les triangles *AOB*, *AOC* et *BOC* sont isométriques.

- Le triangle *ABC* est équilatéral donc *AB* = *BC* = *AC*. *O* est le centre du cercle circonscrit, donc *OA* = *OB* = *OC* : ce sont des rayons. Les triangles *AOB*, *AOC* et *BOC* ont leurs trois côtés égaux deux à deux (*OA* = *OB* = *OC* et *OA* = *OB* = *OC*), donc ils sont isométriques.
- On considérant la rotation de centre *O* et d'angle 60°, de sens direct, on voit que l'image de *A* est *B*, l'image de *B* est *C* et l'image de *C* est *A*. Donc l'image de *AOB* est *BOC* et ces tringles sont isométriques. De même, l'image de *BOC* est *BOA*, donc ils sont isométriques.

Exercice 2. *ABC* est un triangle rectangle en *A* et *H* est le pied de la hauteur issue de l'angle droit.



1. Démontrons que les triangles *ABH* et *ABC* sont semblables.
Les triangles *ABH* et *ABC* sont rectangles ($\widehat{AHB} = \widehat{BAC} = 90°$) et ils ont un angle commun ($\widehat{ABH} = \widehat{ABC}$), donc ils ont deux angles égaux deux à deux, ils sont semblables.

2. Démontrons que les triangles *ACH* et *ABC* sont semblables.
Les triangles *ACH* et *ABC* sont rectangles ($\widehat{AHC} = \widehat{BAC} = 90°$) et ils ont un angle commun ($\widehat{ACH} = \widehat{ACB}$), donc ils ont deux angles égaux deux à deux, ils sont semblables.

3. Nous allons en déduire les relations suivantes : $BH \times BC = BA^2$ $CH \times CB = CA^2$ $HB \times HC = HA^2$.
Comme les triangles *ABH* et *ABC* sont semblables, donc leurs côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels. On a le tableau de proportionnalité suivant :

Angles égaux	$\widehat{ABH} = \widehat{ABC}$	$\widehat{AHB} = \widehat{BAC}$	$\widehat{BAH} = \widehat{ACB}$
Côtés du triangle *ABH*	*AH*	*AB*	*BH*
Côtés du triangle *ABC*	*AC*	*BC*	*AB*

Les produits en croix sont égaux, par exemple : $AB \times AB = BC \times BH$, soit aussi : $BH \times BC = BA^2$.

Comme les triangles *ACH* et *ABC* sont semblables, donc leurs côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels. On a le tableau de proportionnalité suivant :

Angles égaux	$\widehat{ACH} = \widehat{ACB}$	$\widehat{AHC} = \widehat{BAC}$	$\widehat{CAH} = \widehat{ABC}$
Côtés du triangle *ACH*	*AH*	*AC*	*CH*
Côtés du triangle *ABC*	*AB*	*BC*	*AC*

Les produits en croix sont égaux, par exemple : $AC \times AC = BC \times CH$, soit aussi : $CH \times CB = CA^2$.

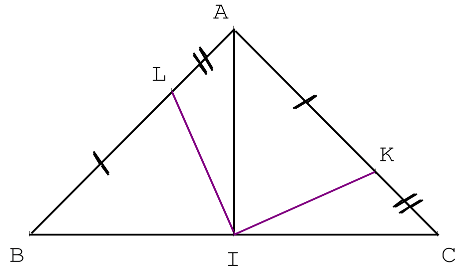
Comme les triangles *ABH* et *ABC* sont semblables, ils ont leurs trois angles égaux deux à deux.
Comme les triangles *ACH* et *ABC* sont semblables, ils sont leurs trois angles égaux deux à deux.
Ainsi les triangles *ABH*, *ABC* et *ACH* ont leurs trois angles égaux deux à deux.
Donc les triangles *ABH* et *ACH* sont semblables.

Comme les triangles *ABH* et *ACH* sont semblables, donc leurs côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels. On a le tableau de proportionnalité suivant :

Angles égaux	$\widehat{AHB} = \widehat{AHC}$	$\widehat{ABH} = \widehat{CAH}$	$\widehat{BAH} = \widehat{ACH}$
Côtés du triangle *ABH*	*AB*	*AH*	*BH*
Côtés du triangle *ACH*	*AC*	*CH*	*AH*

Les produits en croix sont égaux, par exemple : $BH \times CH = AH \times AH$, soit aussi : $BH \times HC = HA^2$.

Exercice 1.



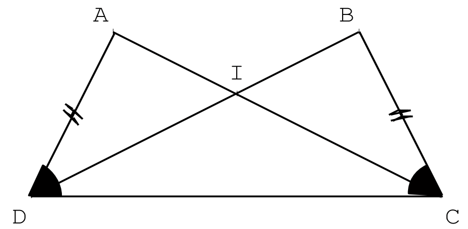
Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle isocèle rectangle en A.
$AL = KC$ et I est le milieu de $[BC]$.
Le but de cet exercice est de montrer que le triangle ILK est isocèle rectangle.

1. a. Justifier la nature des triangles ABI et ACI.
b. Démontrer que les triangles ALI et IKC sont isométriques.

2. Démontrer que $\widehat{LIK} = 90°$.
3. Conclure.

Exercice 2.

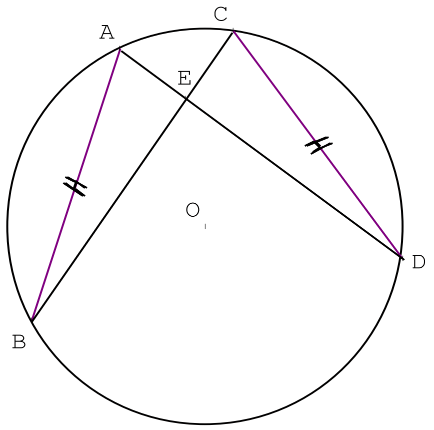
On considère la figure ci-contre. On sait que $AD = BC$ et $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$.
Le but de cet exercice est de montrer que $ABCD$ est un trapèze isocèle.



1. Démontrer que les triangles ACD et BCD sont isométriques.
2. a. En déduire que le triangle IDC est isocèle en I.
b. En déduire que le triangle AIB est isocèle en I.
3. Démontrer que (AB) // (DC) (considérer par exemple $\widehat{IAB}$ et $\widehat{ICD}$).
4. Conclure.

Exercice 3.

Dans ce cercle ci-dessous, les cordes $[AB]$ et $[CD]$ ont la même longueur.
1. Démontrer que les triangles EAB et ECD sont isométriques.
2. En déduire que (OE) est la médiatrice de $[BD]$.

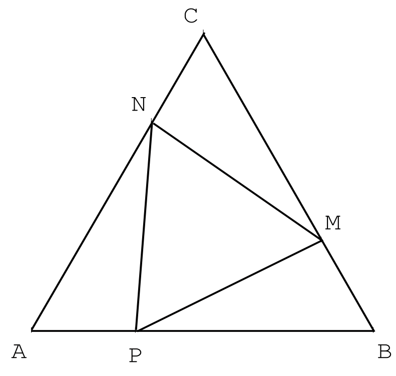


Exercice 4.

Soit ABC un triangle équilatéral et M un point du segment $[BC]$.
On construit les points N et P tels que

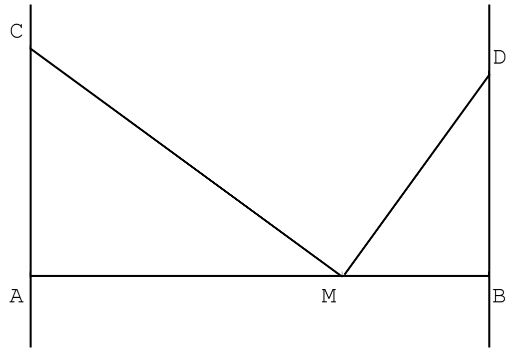
- $N \in [CA]$ et $CN = BM$.
- $P \in [AB]$ et $AP = BM$.

1. Montrer que les triangles BMP et CNM sont isométriques.
2. Montrer que les triangles CNM et APN sont isométriques.
3. En déduire que le triangle MNP est équilatéral.



Exercice 5.

Soit A et B deux points distincts et C un point de la perpendiculaire en A à (AB). A tout point M du segment $[AB]$ autre que A et B, on associe le point D intersection de la perpendiculaire en B à (AB) et de la perpendiculaire en M à (CM).



1. Montrer que les triangles ACM et BDM sont semblables.

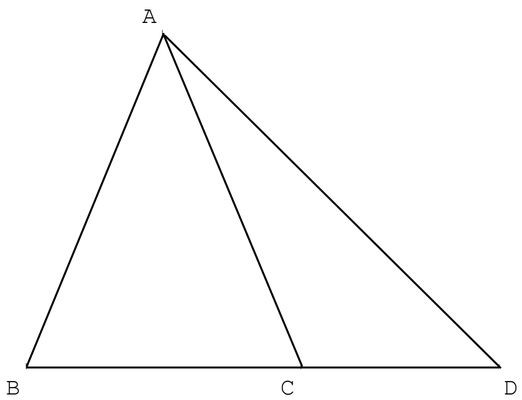
2. En déduire que $MA \times MB = AC \times BD$.

Exercice 6.

On considère un triangle ABC (sans angle obtus). On appelle R le pied de la hauteur issue de B et Q le pied de la hauteur issue de C. Montrer que les triangles ARB et AQC sont semblables.

Exercice 7.

On considère la figure suivante où l'on sait que $AD = BD$ et $AB = AC$.

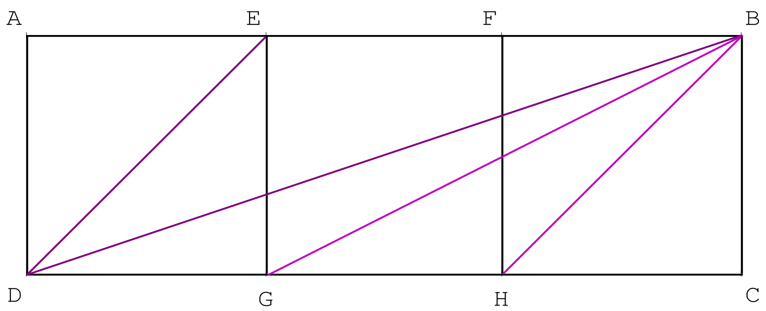


Montrer que les triangles ABC et ABD sont semblables.

Exercice 8.

$ABCD$ est un rectangle avec $AB = 3\,AD$.

$AEGD$, $EFHG$ et $FBCH$ sont des carrés de côté 1.



1. Calculer les valeurs exactes des longueurs ED, BH, GB et DB.

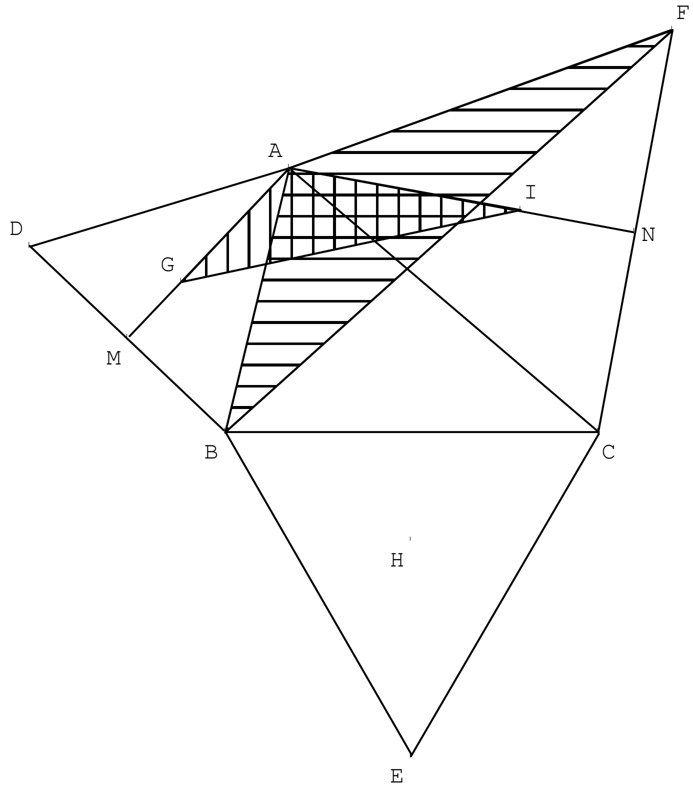
2. Calculer les rapports $\dfrac{ED}{HG}$, $\dfrac{DB}{GB}$ et $\dfrac{BE}{BH}$.

3. Que peut-on en déduire pour les triangles EDB et HGB ?

4. Démontrer que $\widehat{BDC} + \widehat{BGC} = \widehat{BHC}$.

Exercice 9.

A l'extérieur d'un triangle ABC on a construit les triangles équilatéraux BAD, CBE et ACF.
On note G, H et I leurs centres de gravité respectifs.



1. Montrer que les triangles ADC et ABF sont isométriques. En déduire que $DC = BF$.

2. Montrer que les triangles CBF et CAE sont isométriques. En déduire que $BF = AE$.

3. a. Montrer que $\widehat{GAI} = \widehat{BAF}$.

b. Montrer que $\dfrac{AG}{AB} = \dfrac{AI}{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

c. En déduire que les triangles AGI et ABF sont semblables.

d. En déduire la valeur du quotient $\dfrac{GI}{BF}$.

4. Ecrire, sans les démontrer, deux égalités analogues à celle obtenue à la question précédente

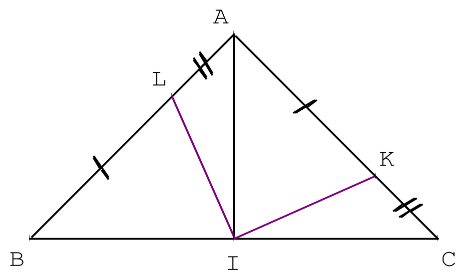
5. Déduire des questions précédentes que le triangle GHI est équilatéral.

Indications.

4. $\dfrac{GH}{DC} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $\dfrac{HI}{AE} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

5. On a $\dfrac{GI}{BF} = \dfrac{GH}{DC} = \dfrac{HI}{AE}$, or $BF = DC = AE$, donc $GH = HI = GI$.

Exercice 1.



Sur la figure ci-contre, *ABC* est un triangle isocèle rectangle en *A*.
AL = *KC* et *I* est le milieu de [*BC*].
Le but de cet exercice est de montrer que le triangle *ILK* est isocèle rectangle.

1. a. Justifions la nature des triangles *ABI* et *ACI*.
Le triangle *ABC* est rectangle donc la médiane *AI* issue de l'angle droit mesure la moitié de l'hypoténuse, soit aussi *IA* = *IB* = *IC*. Ceci prouve que les triangles *ABI* et *ACI* sont isocèles. Le triangle *ABC* est isocèle, donc la médiane *AI* issue de *A* est aussi une hauteur, donc (*AI*) ⊥ (*BC*). Donc les triangles *ABI* et *ACI* sont rectangles en *I*. Conclusion : les triangles *ABI* et *ACI* sont isocèles rectangles.

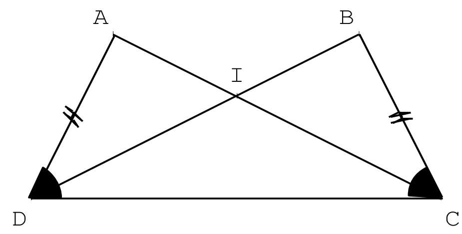
b. Démontrons que les triangles *ALI* et *IKC* sont isométriques.
Comme *ABI* et *ACI* sont isocèles rectangles alors $\widehat{BAI} = \widehat{ACI} = 45°$. Et d'après la question précédente *AI* = *CI*. Les triangles *ALI* et *IKC* ont donc un angle égal ($\widehat{BAI} = \widehat{ACI}$) compris entre deux côtés égaux deux à deux (*AL* = *KC* et *AI* = *CI*), donc ils sont isométriques.

2. Démontrons que $\widehat{LIK} = 90°$.
Comme les triangles *ALI* et *IKC* sont isométriques, leurs angles sont égaux deux à deux, donc $\widehat{AIL} = \widehat{CIK}$. On a donc : $\widehat{LIK} = \widehat{LIA} + \widehat{AIK} = \widehat{AIL} + \widehat{KIA} = \widehat{CIK} + \widehat{KIA} = \widehat{CIA} = 90°$.

3. Conclusion : Comme *ALI* et *IKC* sont isométriques, alors leurs trois côtés sont égaux deux à deux, en particulier *IK* = *IL*. Comme *IK* = *IL* et $\widehat{LIK} = 90°$, alors le triangle *LIK* est rectangle et isocèle.

Exercice 2.

On considère la figure ci-contre. On sait que *AD* = *BC* et $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$.
Le but de cet exercice est de montrer que *ABCD* est un trapèze isocèle.



1. Démontrons que les triangles *ACD* et *BCD* sont isométriques.

Les triangles *ACD* et *BCD* ont un angle égal ($\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$) compris entre côtés égaux deux à deux (*AD* = *BC* et *DC* côté commun), donc ils sont isométriques.

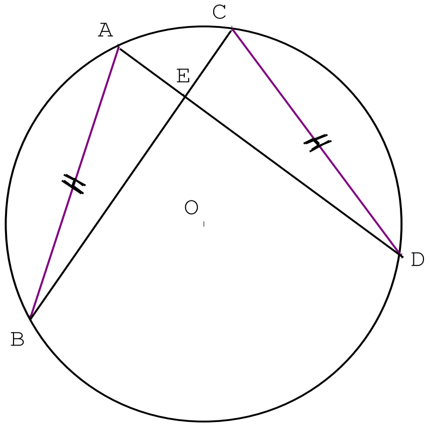
2. a. Nous allons en déduire que le triangle *IDC* est isocèle en *I*.
Comme les triangles *ACD* et *BCD* sont isométriques, alors leurs angles sont égaux deux à deux, en particulier $\widehat{ACD} = \widehat{BDC}$. Le triangle *IDC* a donc deux angles égaux ($\widehat{IDC} = \widehat{ICD}$), il est isocèle en *I*.
b. Comme *IDC* est isocèle en *I*, alors *ID* = *IC*. Et comme *BD* = *AC* (car *ACD* et *BCD* sont isométriques), alors par différence, on obtient : *IB* = *IA*, donc *AIB* est isocèle en *I*.

3. Démontrons que (*AB*) // (*DC*).
Le triangle *AIB* est isocèle en *I*, donc les angles à la base $\widehat{IAB}$ et $\widehat{IBA}$ sont égaux. Les triangles *AIB* et *CID* ont un angle égal ($\widehat{AIB} = \widehat{CID}$ opposés par le sommet), donc $\widehat{BAI} = \frac{180° - \widehat{AIB}}{2} = \frac{180° - \widehat{CID}}{2} = \widehat{ICD}$. Les droites (*AB*) et (*DC*) forment des angles alternes internes égaux, donc elles sont parallèles.

4. Conclusion : Le quadrilatère *ABCD* est un trapèze isocèle.

Exercice 3.

Dans ce cercle ci-dessous, les cordes [AB] et [CD] ont la même longueur.



1. Démontrons que les triangles EAB et ECD sont isométriques.

Les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$ sont inscrits dans le cercle et interceptent le même arc $\widehat{BD}$, donc ils sont égaux, par conséquent $\widehat{BAE} = \widehat{ECD}$. De même, les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ sont inscrits dans le cercle et interceptent le même arc $\widehat{AC}$, donc ils sont égaux, par conséquent $\widehat{ABE} = \widehat{CDE}$. Les triangles EAB et ECD ont donc un côté égal ($AB = CD$) adjacent à deux angles de même mesure deux à deux ($\widehat{BAE} = \widehat{ECD}$ et $\widehat{ABE} = \widehat{CDE}$), donc ils sont isométriques.

2. Nous allons en déduire que (OE) est la médiatrice de [BD].

Comme les triangles EAB et ECD sont isométriques, alors leurs côtés sont égaux deux à deux, en particulier $BE = DE$. Donc E est équidistant de B et D, et E appartient à la médiatrice de [BD].

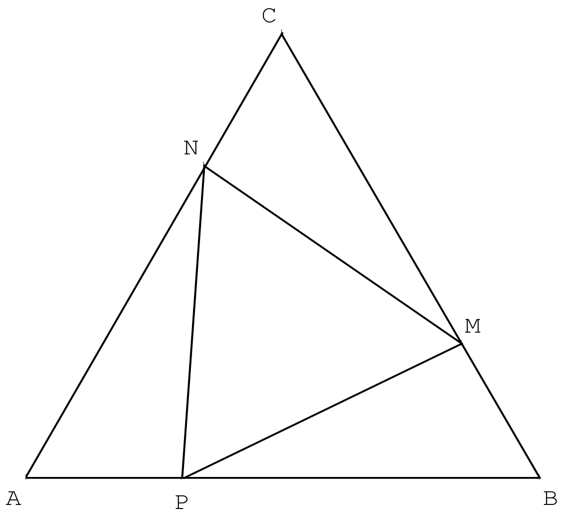
De même, comme $OB = OD$ (= rayon), alors O est équidistant de B et D. Donc O appartient à la médiatrice de [BD]. Donc (OE) est la médiatrice de [BD].

Exercice 4.

Soit ABC un triangle équilatéral et M un point du segment $[BC]$.

On construit les points N et P tels que

- $N \in [CA]$ et $CN = BM$.
- $P \in [AB]$ et $AP = BM$.



1. Montrons que les triangles BMP et CNM sont isométriques.

Le triangle ABC est équilatéral, donc tous ces angles mesurent 60°. Comme $AB = BC$ et $AP = BM$, alors par différence $PB = MC$. Les triangles BMP et CMN ont un angle égal ($\widehat{PBM} = \widehat{MCN} = 60°$) adjacent à deux côtés égaux deux à deux ($BM = CN$: énoncé, et $PB = MC$), donc ils sont isométriques.

2. Montrons que les triangles CNM et APN sont isométriques.

Le triangle ABC est équilatéral, donc tous ces angles mesurent 60°. Comme $BC = CA$ et $BM = CN$, alors par différence $MC = NA$. Les triangles CNM et APN ont un angle égal ($\widehat{MCN} = \widehat{NAP} = 60°$) adjacent à deux côtés égaux deux à deux ($CN = AP$: énoncé, et $MC = NA$), donc ils sont isométriques.

3. Nous allons en déduire que le triangle MNP est équilatéral.

Les triangles BMP et CNM sont isométriques, donc leurs côtés sont égaux deux à deux, en particulier $PM = MN$. De même, comme CNM et APN sont isométriques, alors $MN = NP$.

Ainsi, $MN = NP = PM$, le triangle MNP est équilatéral.